THE
PHYSICAL
SOCIETY

MEMOIRS

OF THE

COLLEGE OF SCIENCE

KYOTO IMPERIAL UNIVERSITY

SERIES A

VOL. XIV, No. 1

JANUARY 1931

KYOTO

1127 27

Über die Ausstrahlung der vertikalen Antennen in der drahtlosen Telegraphie mit kurzen Wellen

Von

W. Nakayama u. K. Komatu.

(Eingegangen am 9, Oktober 1930)

Übersicht

Unter der Annahme der unvollkommenen Leitfähigkeit der Erde wird hier die Strahlung von vertikalen Antennen untersucht, welche in Grund- oder Oberschwingungen erregt sind. Die strahlungsformel ist angegeben; nach der Formel sind die Energieströmungen in verschiedenen Elevationswinkeln berechnet, und die Richtcharakteristik von vertikalen Antennen, bezüglich der verschiedenen Erregungsarten und verschiedenen Erdboden, ist graphisch dargestellt.

Beim Vergleich der Ergebnisse mit den Bergmannschen Experimenten wird gezeigt, dass die Hauptmaximum-Stellung der Strahlung in beiden Fällen überhaupt übereinstimmt und doch ein grosser Unterschied, d. h. eine grosse Verminderung der Strahlung, wegen der unvollkommenen Leitfähigkeit der Erde stattfindet.

Einleitung

Das Ausstrahlungsproblem ist zu erst gründlich von M. Abraham[1] und dann noch allgemeiner von van der Pol[2] theoretisch behandelt worden, wobei wie bekannt die Annahme der vollkommenen Leitfähigkeit der Erde zu grund liegt. Neuerdings hat L. Bergmann[3] fast gleichzeitig S. Uda[4], das experimentell untersucht. Dabei gab es wegen der kleinen Entfernung zwischen Sender und Empfänger keine merkwürdige Absorption von der Erde. So fand man ein gute Übereinstimmung des Experiments mit der Theorie.

1. M. Abraham, Phys. Zeitschr. **22**, S. 329, 1901.
2. van der Pol, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **13**, S. 217, 1918.
3. L. Bergmann, Ann. d. Phys. **82**, S. 504, 1927.
4. S. Uda, Proc. Inst. Radio Eng. **15**, S. 377, 1927.

Aber wenn man mit der wirklichen Erde der endlichen Leitfähigkeit beschäftigt ist, werden die kurzen Wellen an der Erdoberfläche sehr stark absorbiert. Mit Rücksicht auf die endliche Leitfähigkeit gelang es erst A. Sommerfeld[2], die Theorie der Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie festzustellen. Er idealisierte die Form der Senderantenne weitgehend als einen schwingenden Dipol. So ist sein Resultat mit Recht nur auf die langen Wellen anwendbar. T. L. Eckersley[2] berechnete, Rücksicht auf die endliche Leitfähigkeit nehmend, annäherendes polares Diagramm für den Fall eines vertikalen, an einer Höhe befindlichen Dipols. Ein unmittelbares Ergebnis war, dass die Antenne praktisch keine Energie in die horizontale Richtung ausstrahlt, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des Senders.

Zweck der vorliegenden Arbeit[3] ist es nun, die Ausstrahlung von stabförmigen Antennen welche in Grund- oder Oberschwingung erregt sind, vollständiger als vorhergehenden zu berechnen. Wir wollen dabei die Ideen in den oben zitierten Arbeiten von Abraham u. Sommerfeld benutzen. Die Berechnungen werden in der Annahme ausgeführt, dass die Antenne ohne Beschwerungen auf der Erdoberfläche senkrecht steht und am unteren Ende geerdet ist. Die Schwingungsform nehmen wir als rein monochromatisch, ihre Zeitabhängigkeit also gegeben durch $e^{-i\omega t}$ an. Dies entspricht in der Tat der praktischen Form der modernen Sender.

§ 1. Der auf einer Höhe über der ebenen Erde liegende vertikale Dipol[4]

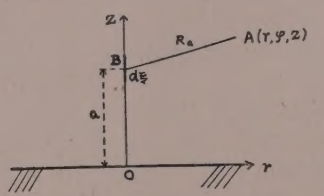


Fig. 1

1. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **28**, S. 665. 1909: nachher, zehn Jahre später, hat H. Weyl dieselbe in mathematischer Hinsicht umgearbeitet, Ann. d. Phys. **38**, S. 481, 1919.

2. T. L. Eckersley, J. I. E E. **65**, S. 600. 1927.

3. M. J. O. Strutt hat derartiges Problem in seinen zwei Arbeiten: Über die Strahlung von Antennen usw. behandelt (Ann. d. Phys. **1** S. 728. 1929, und ebenda, **4**. S. 1. 1930) In der ersteren erscheint aber das Näherungsverfahren doch ungeeignet, besonders in Bezug auf den höheren Elevationswinkel, und in der letzteren hat er keine Berechnung für den Fall des linearen Oscillators angegeben.

4. Vgl. A. Sommerfeld a. a. O.

Die Erdoberfläche sei die Ebene $z=0$, nach der Atomosphäre rechnen wir $z>0$, nach dem Erdboden hin $z<0$. Der Ort B des Dipols hat die Koordinaten $(0,0,a)$ eines Zylinderkoordinatensystems (r, φ, z), wie es im vorstehenden Bild gezeichnet ist (Fig. 1).

Der Abstand des Aufpunktes A von B ist dann:

$$R_a=\sqrt{r^2+(z-a)^2}.$$

Der Hertzsche Vektor Π hat die Richtung der Z-Achse und ist von φ unabhängig:

$$\Pi=\Pi_z(r,z).$$

Derselbe genügt der folgenden Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \Delta\Pi+k^2\Pi=0 \begin{cases} k=k_0=\dfrac{\omega}{c} & \text{für } z>0 \\ k^2=\dfrac{\varepsilon\omega^2+i\sigma\omega}{c^2} & \text{für } z<0, \end{cases}$$

wo ω, c, ε, σ Kreisfrequenz, Lichtgeschwindigkeit, Dielektrizitätskonstante und Leitvermögen in rationalen Einheiten bezeichnen. Wir setzen für den Luftraum $\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=0$, für den Erdboden $\mu=1$. Gesucht wird eine Lösung von (1), welche im Punkte in bestimmter weise unendlich wird und in unendlichem Abstand von B samt ihren ersten Ableitungen verschwindet. Nun bestehen für die elektromagnetischen Kräfte die folgende Beziehungen:

$$(2)\qquad \begin{gathered} H_r=H_z=0, \quad H=H_\varphi=-i\frac{\varepsilon\omega+i\sigma}{c}\frac{\partial\Pi}{\partial r}=\begin{cases} -ik_0\dfrac{\partial\Pi}{\partial r} & \cdots\cdots z>0 \\ -i\dfrac{k^2}{k_0}\dfrac{\partial\Pi}{\partial r} & \cdots\cdots z<0, \end{cases} \\ E_r=\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\partial z}, \quad E_\varphi=0, \quad E_z=k^2\Pi+\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right). \end{gathered}$$

Die Grenzbedingungen verlangen Stetigkeit der tangenten Komponenten der Feldstärken bei $z=0$. Dies liefert nach (2):

$$k_0^2\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}=k^2\frac{\partial\Pi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\partial z}=\frac{\partial^2\pi}{\partial rz\partial}.$$

Hier haben wir den Wert von Π in Luft durch den Index 0 ausgezeichnet. Da die vorstehenden Gleichungen für jeden Wert von r gelten, so erhalten wir

$$(3)\qquad \begin{cases} k_0^2 \Pi_0 = k^2 \Pi \\ \dfrac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{cases}$$

Und endlich:

$\Pi_0 - \frac{1}{R_a} e^{jR_0 R_a}$ ist samt den ersten Ableitungen einschliesslich der Stelle $r=0$, $z=a$ (bei spezieller Wahl der Amplitude) stetig.

Bei Benutzung von Zylinderkoordinaten sind nun die Ausdrücke von der Form

$$(4)\qquad \begin{cases} f_0(\lambda) J(\lambda r) e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}(z-a)} \lambda \\ f(\lambda) J(\lambda r) e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k^2}(z+a)} \lambda \end{cases}$$

bekanntlich partikulare Lösungen der Differentialgleichung (1). J ist die Besselsche Funktion vom Index o, λ ein willkürlicher Parameter, f_0 und f willkürliche, alsbald zu bestimmende Funktionen.

Wie bei Sommerfeld erhalten wir

$$\frac{e^{ik_0\sqrt{r^2+(z-a)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}} = \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \lambda d\lambda.$$

Hierbei ist die Wurzel im Exponenten bzw. mit positiv oder negativ reellem Teil, zu wählen, je nach dem Gebiet $z<a$ oder $z>a$, was für die Konvergenz des Integrales wichtig ist.

Wir setzen nun die gesuchten Π_0 und Π Funktionen im Gebiete zwischen $z>0$ und $z<0$ in folgender Form an:

$$(5a)\qquad \Pi_0 = \int_0^\infty \frac{J(\lambda r) e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \lambda d\lambda + \int J(\lambda r) f_0(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}(z+a)} \lambda d\lambda \quad \cdots\cdots z>0,$$

$$(5b)\qquad \Pi = \int_0^\infty J(\lambda r) f(\lambda) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}(z-a)} \lambda d\lambda \quad \cdots\cdots z<0.$$

Die Exponenten mit negativ reellem Teil in den Integranden verschwinden an kleiner Stelle, wo diese Funktionen überhaupt zur Anwendung kommen. Daher sind die Integrale sicher konvergent.

Nun lassen sich die Grenzbedingungen (3) leicht befriedigen. Um die erste der Bedingungen:

$$k_0^2 \Pi_0 = k^2 \Pi$$

zu erfüllen, haben wir zu verlangen, dass:

$$\frac{k_0^2}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}e^{-a\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}+f_0(\lambda)k_0^2e^{-a\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}=k^2f(\lambda)e^{-a\sqrt{\lambda^2-k^2}}.$$

Ebenso liefert die zweite Bedingung:

$$e^{-a\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}-f_0(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}e^{-a\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}=\sqrt{\lambda^2-k^2}f(\lambda)e^{-a\sqrt{\lambda^2-k^2}}.$$

Durch diese beiden Gleichungen sind die Funktionen f_0 und f bestimmt:

$$f(\lambda)=\frac{2k_0^2e^{-a\sqrt{\lambda^2-k_0^2}+a\sqrt{\lambda^2-k^2}}}{N}$$

(6)

$$f_0(\lambda)=\frac{2k^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}-k_0^2\sqrt{\lambda^2-k^2}}{N\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}$$

mit der Abkürzung

$$N\equiv k^2\sqrt{\lambda^2-k_0^2}+k_0^2\sqrt{\lambda^2-k^2}.$$

Tragen wir diese in (5ab), so ergibt sich schliesslich:

$$\Pi_0=\int_0^\infty\frac{J(\lambda r)e^{\pm\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(z-a)}}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\lambda d\lambda-\int_0^\infty\frac{J(\lambda r)e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(z+a)}}{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}\lambda d\lambda$$

(7)

$$+2k^2\int_0^\infty\frac{J(\lambda r)e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(z+a)}}{N}\lambda d\lambda$$

$$\Pi=2k_0^2\int_0^\infty\frac{J(\lambda r)e^{+\sqrt{\lambda^2-k^2}z-a\sqrt{\lambda^2-k_0^2}}}{N}\lambda d\lambda.$$

Wenn wir die Hankelsche Funktion H statt J einführen, so erhalten wir als neue Form der Lösung:

$$(8)\qquad \Pi_0=\frac{e^{ik_0R_a}}{R_a}-\frac{e^{ik_0R_{-a}}}{R_{-a}}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2}{N}H(\lambda r)\,e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(z+a)}\lambda d\lambda.$$

Das zweite Glied der rechten Seite entspricht dem negtiven Bilde von B. Wenn man a sich zu null annähern lässt, so gleichen sich die ersten zwei Glieder miteinander aus und (8) geht in den Ausdruck von Sommerfeld.

Wie bei der Berechnung von Sommerfeld, besteht das dritte Glied aus zwei Teilen, nämlich Oberflächenwellen P und Raumwellen Q. Für die grossen Werte von r, wird

$$(9a)\qquad P=2\pi i\frac{k^2}{K}H(hr)e^{-\sqrt{h^2-k_0^2}(z+a)}$$

$$(9b)\qquad Q=\frac{-2k^2}{N(k_0)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_a}e^{ik_0R_{-a}}\right)$$

$$= \frac{-2k^2 i}{k_0\sqrt{k_0^2-k^2}}(z+a)\frac{e^{ik_0R_{-a}}}{R_{-a}^2}$$

mit den Abkürzungen:

$$(10) \quad \frac{1}{h^2} \equiv \frac{1}{k_0^2}+\frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad K \equiv \frac{k^2}{\sqrt{h^2-k_0^2}}+\frac{R_0^2}{\sqrt{h^2-k^2}}.$$

Daher haben Wir endlich den folgenden Ausdruck für jeden Punkt $z>0$:

$$(11) \quad \Pi_0 = \frac{e^{ik_0R_a}}{R_a}-\frac{e^{ik_0R_{-a}}}{R_{-a}}+2\pi i\frac{k^2}{K}H(hr)e^{-\sqrt{h^2-k_0^2}(z+a)} - \frac{2ik^2(z+a)}{k_0\sqrt{k_0^2-k^2}}\frac{e^{iR_0R_{-a}}}{R_{-a}^2}.$$

Wir wollen uns in folgenden Paragraphen darauf beschränken, die Feldstärken und die Energieverteilung in ersten Medien, Luft zu berechnen.

§ 2. Oberflächenwellen

Wenn wir für H die asymptotische Darstellung,

$$H(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{i\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)}$$

benutzen, dann wird

$$P = \sqrt{\frac{2\pi i}{hr}}\frac{2k^2}{K}e^{ihr-\sqrt{h^2-k_0^2}(z+a)}.$$

Dies entspricht den Oberflächenwellen, wie es Sommerfeld erst genannt hat. P hat die folgenden Eigenschaften, welche den Namen „Oberflächenwellen" verdienen:

1° Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der Erdoberfläche ist gleich ω/h. Und diese für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit massgebende Grösse h bestimmt sich nun in völlig symmetrischer Weise aus den Materialkonstanten k_0 und k der beiden Medien, so dass sie ihren Ursprung einem Zusammenwirken beider Medien verdankt.

2° P nimmt mit der horizontalen Entfernung ab wie $r^{-\frac{1}{2}}$, abgesehen von der exponentiellen Dämpfung.

3° P nimmt mit der vertikalen Entfernung exponentiell ab und zwar so, dass der Wert von P an einem Punkt (r, z) mit dem Dipol (o, a), der Wert an einen Punkt $(r, z+a)$ mit dem Dipol (o, o) gleich ist.

Nun wollen wir die numerischen Werte für h und $\sqrt{h^2-k_0^2}$ geben, welche für die Dämpfung massgebend sind. Aus (10) folgen:

$$(12)\qquad h=\sqrt{\frac{k_0^2 k}{k_0^2+k^2}}=k_0\sqrt{\frac{\frac{k^2}{k_0^2}}{1+\frac{k^2}{k_0^2}}}$$

und

$$(13)\qquad \sqrt{h^2-k_0^2}=\sqrt{\frac{-k_0^4}{k_0^2+k^2}}=k_0\sqrt{\frac{-1}{1+\frac{k^2}{k_0^2}}}=\frac{2\pi}{\lambda}\left(1+\frac{k^2}{k_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi i}{2}}$$

(λ: Wellenlänge).

Es ist[1]

für Seewasser	$\frac{k^2}{k_0^2}=80+i\cdot 12\cdot 10^4$
für Süsswasser	„ $=80+i\cdot 120$
für nassen Boden	„ $=10+i\cdot 60$
für trockenen Boden	„ $=4+i\cdot 12$,

wenn die Wellenlänge zu 2km. angenommen wird. Wenn man diese für den Fall von Wellenlänge 20m. benutzen will, so muss man den imaginären Teil 100 dividieren.

Die aus (12) folgenden Werte des reellen und imaginären Teils von h enthält die nachstehende Tabelle:

Tabelle I

	$\lambda=2km.$	$\lambda=20m.$	
Seewasser:	$\mathrm{Imag}(h)=1.31\cdot 10^{-10}$	$\mathrm{Imag}(h)=1.3\cdot 10^{-6}$	$\mathrm{Re}(h)=\frac{2\pi}{\lambda}(1-8.5\cdot 10^{-8})$
Süsswasser:	„ $=9.02\cdot 10^{-8}$	„ $=2.87\cdot 10^{-7}$	„ $=\frac{2\pi}{\lambda}(1-6.17\cdot 10^{-3})$
Nasser Boden:	„ $=2.62\cdot 10^{-8}$	„ $=6.23\cdot 10^{-5}$	„ $=\frac{2\pi}{\lambda}(1-3.45\cdot 10^{-2})$
Trockener Boden:	„ $=1.13\cdot 10^{-6}$	„ $=8.43\cdot 10^{-6}$	„ $=\frac{2\pi}{\lambda}(1-1.05\cdot 10^{-1})$

Wir fragen sodann, in welchen horizontalen Entfernungen die Oberflächenwellen P zum Verhältnis $1/e$ abnehmen. Aus Tabelle (I) erhalten wir wieder die nachstehende Tabelle:

(1.) Vgl. Sommerfeld. S. 721, a. a. O.

Tabelle II

	$\lambda=2km.$	$\lambda=20m.$
Seewasser:	$\frac{1}{\text{Imag}(h)}=76.4\cdot10^5$cm.	$\frac{1}{\text{Imag}(h)}=7.64\cdot10^5$
Süsswasser:	„ $=1.11\cdot10^7$	„ $=3.46\cdot10^6$
Nasser Boden:	„ $=3.82\cdot10^7$	„ $=1.6\cdot10^4$
Trockener Boden:	„ $=8.85\cdot10^7$	„ $=1.19\cdot10^5$

Hier entspricht I/Imag. (h) jener horizontalen Entfernung ausgedrückt in cm.. In der Tabelle sehen wir, dass bei Kurzwellen die Fortpflanzung längs der Erdoberfläche auf grosse Entfernungen gar keine Rolle spielen kann, wie es schon wohl bekannt ist.

Ebenso erhält man aus (13) die folgende Tabelle für den reellen Teil von $1/\sqrt{h^2-k_0^2}$:

Tabelle III

	$\lambda=2km.$	
Seewasser:	$1/Re(\sqrt{h^2-{}_0k^2})=1.56\cdot10^7$	$1/Re(\sqrt{h^2-k_0^2})=1.56\cdot10^4$
Süsswasser:	„ $=8.13\cdot10^5$	„ $=3.97\cdot10^5$
Nasser Boden:	„ $=1.11\cdot10^6$	„ $=4.47\cdot10^4$
Trockener Boden:	„ $=2.32\cdot10^5$	„ $=5.95\cdot10^4$

Hier bedeutet $1/Re\,(\sqrt{h^2-k_0^2})$ die vertikale Entfernung in cm., worin die Oberflächenwellen P zum Verhältnis $1/e$ abnehmen. In der Tabelle sehen wir, dass bei Kurzwellen die Oberflächenwellen mehr an die Erdoberfläche als bei Langwellen beschränkt sind.

§ 3. Die vertikale stabförmige Antenne auf ebener Erde

In diesem Paragraphen wollen wir die im vorigen Paragraphen erhaltenen Ergebnisse auf die vertikale stabförmige Antenne anwenden. Wie bei M. Abraham nehmen wir an, dass die Antenne am unteren Ende geerdet und die Schwingungsform rein monochromatisch ist. Für die Stromverteilung nehmen wir auch die folgende Form an:

$$i=\cos\left(2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right)\sin\omega t,\quad 0\leqq\xi\leqq l \quad \text{und}$$

(14)

$$l=\left(\frac{2n+1}{4}\right)\lambda,\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$$

wo l die Antennenlänge ist.

Die Felder in der Umgebung der Antenne können wir als Überlagerung der Felder der einzelnen Dipole ansehen, welche durch Aufladung der Enden dieser Antennenstücke gebildet sind. Die Verteilung der Dipolmomente verhält sich wie die Verteilung der Stromamplitude gegeben in dem Ausdruck (14). Also nehmen wir für die Verteilung der Dipolmomente der Ausdruck $\cos\left(2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right)$ an.

1. Die Felder an der Erdoberfläche (z=0)

Bei diesem Falle verschwinden die ersten zwei Glieder von dem Ausdruck (11) miteinander. Auch das dritte Glied verschwindet schnell für $\lambda = 20$ m., wie nach der Tabelle (11) ersichtlich. (Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall von Kurzwellen ($\lambda = 20$ m.), wenn es auf den numerischen Wert ankommt). Dann ist nur das vierte Glied übrig. Wir erhalten also:

$$\Pi_0 = C_1 \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{2n+1}{4}\lambda=l} \xi \frac{e^{ik_0 R_{-\xi}}}{R^2_{-\xi}} \cos\left(2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi,$$

wo

$$C_1 \equiv -\frac{2ik^2}{k_0\sqrt{k_0^2-k^2}}.$$

Integrierend partiell und λ gegen R vernachlässigend, was in der Wellenzone zulässig ist, erhalten wir:

$$(15) \quad \Pi_0 = \frac{-ik^2\lambda^3}{2\pi^2\sqrt{k_0^2-k^2}} \left\{ \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) l \frac{e^{ik_0 R_l}}{R_l^2} - \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e^{ik_0 R_0}}{R_0^2} \right\}.$$

Π_0 nimmt mit der Entfernung wie R^{-2} ab, also ist es für den betreffenden Punkt verschwindend klein.

2. Die Verteilung der Ausstrahlungsenergie im Raum

Nun müssen wir die Energie berechnen, welche hoch in den Luftraum ausgestrahlt wird. In diesem Falle kann man die Oberflächenwellen vernachlässigen. Daher setzen wir den folgenden Ausdruck für $z > 0$:

$$(16) \quad \Pi_0 = I_1 + I_2$$

wo

$$I_1=\int_0^l\left(\frac{e^{ik_0R_\xi}}{R_\xi}-\frac{e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{-\xi}}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)d\xi$$

und

$$I_2=\frac{-2ik^2}{k_0\sqrt{k_0^2-k^2}}\int_0^l\frac{(z+\xi)e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{-\xi}^2}\cos\left(2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right)d\xi,$$

wenn I_1, partiell integriert, wird

$$I_1=\int_0^l\frac{e^{ik_0R_\xi}}{R_\xi}-\frac{e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{-\xi}}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)d\xi$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi}\left|\sin\left(2\pi\frac{\xi}{\lambda}\right)\frac{e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{+\xi}}\right|_0^l+\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^l\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)$$

$$\frac{ik_0(z-\xi)e^{ik_0R+\xi}}{R_{+\xi}^2}d\xi$$

$$-\frac{\lambda}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)\frac{e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{-\xi}}\Big|_0^l+\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^l\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)$$

$$\frac{ik_0(z+\xi)e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{-\xi}^2}d\xi.$$

Es ist $R>\lambda$, $z>\xi$ und k_0 gleich $\frac{2\pi}{\lambda}$. Daher:

$$I_1=\frac{\lambda}{2\pi}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\left\{\frac{e^{ik_0R_l}}{R_l}-\frac{e^{ik_0R_{-l}}}{R_{-l}}\right\}$$

$$+i\cos\left|-\frac{\lambda}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)\left\{\frac{e^{ik_0R_\xi}}{R_\xi}+\frac{e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{-\xi}}\right\}\right|_0^l$$

$$-i\cos\theta\frac{-\lambda}{2\pi}\int_0^l\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)\left\{\frac{ik_0(z-\xi)(-1)e^{ik_0R_\xi}}{R_\xi^2}\right.$$

$$\left.+\frac{ik_0(z+\xi)e^{ik_0R_{-\xi}}}{R_{-\xi}^2}\right\}d\xi,$$

und man erhält

$$(1-\cos^2\theta)I_1=\frac{\lambda}{2\pi}\left\{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\left(\frac{e^{ik_0R_l}}{R_l}-\frac{e^{ik_0R_{-l}}}{R_{-l}}\right)\right.$$

$$\left.+i\cos\theta\frac{2e^{ik_0R_0}}{R_0}\right\},$$

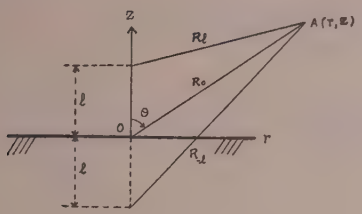


Fig. 2

wo θ der Polarwinkel ist, vom Radius-Vektor R_0 (Fig. 2). Dabei entsteht das Folgende:

$$R_l=R_0-l\cos\theta,\quad R_{-l}=R_0+l\cos\theta,\quad \frac{z}{R_{-l}}\doteq\frac{z}{R_0}=\cos\theta,$$

$$\frac{r}{R_{-l}}\doteq\frac{r}{R_0}=\sin\theta.$$

Trägt man dieses in die vorliegende Gleichung ein, so erhält man:

$$I_1=\frac{\lambda}{\pi\sin^2\theta}\left\{i\cos\theta+(-1)^{n+1}i\sin(R_0\cos\theta)\right\}\frac{e^{ik_0R_0}}{R_0}$$

(17)

$$=\frac{\lambda}{\pi\sin^2\theta}\left\{i\cos\theta+(-1)^{n+1}i\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)\right\}\frac{e^{ik_0R_0}}{R_0}.$$

Dies liefert endlich den Bestandteil der magnetischen Kraft H_φ herrührend von I_1, wenn man I_1 in den Ausdruck (2) einträgt mit dem Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ multipliziert und den reellen Teil vorzieht, d. h.:

$$(17a)\quad H_\varphi^{(1)}=-\frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\sin\theta}\left\{\cos\theta+(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)\right\}$$

$$\frac{\sin(k_0R_0-\omega t)}{R_0}.$$

Nun berechnen wir das Integral I_2 ganz analog wie oben. Wir bezeichnen:

$$I_2' = \int_0^l \frac{e^{ik_0 R_{-\xi}}}{R_{-\xi}} \cos\left(2\pi \frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi.$$

Dann wird:

$$I_2' = \frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{e^{ik_0 R_{-\xi}}}{R_{-\xi}} \sin\left(2\pi \frac{\xi}{\lambda}\right) \right|_0^l$$

$$- \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^l \frac{ik_0(z+\xi)}{R_{-\xi}^2} e^{ik_0 R_{-\xi}} \sin\left(2\pi \frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e^{ik_0 R_{-l}}}{R_{-l}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 ik_0 z \left| \frac{e^{ik_0 R_{-\xi}}}{R_{-\xi}^2} \cos\left(2\pi - \frac{\xi}{\lambda}\right) \right|_0^l$$

$$- \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 ik_0 z \int_0^l \frac{ik_0 z}{R_{-\xi}^2} e^{ik_0 R_{-\xi}} \cos\left(2\pi \frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e^{ik_0 R_{-l}}}{R_{-l}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) - \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 ik_0 \cos\theta \frac{e^{ik_0 R_0}}{R_0}$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 k_0^2 \cos^2\theta I_2'$$

od.

$$I_2' = \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{e^{ik_0 R_{-l}}}{R_{-l}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) - i\cos\frac{e^{ik_0 R_0}}{R_0^2} \right\}.$$

Endlich haben wir:

$$(18) \quad I_2 \fallingdotseq - \frac{2ik^2}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R_0} \left\{ e^{ik_0 R_{-l}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) - i\cos\theta\, e^{ik_0 R_0} \right\}.$$

Ferner erhalten wir nach (2):

$$-ik_0 \frac{\partial I_2}{\partial r} = - \frac{2k_0 k^2}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R_0}$$

$$\left\{ \frac{ik_0 r}{R_{-l}} e^{ik_0 R_{-l}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) - i\cos\theta \frac{ik_0 r e^{ik_0 R_0}}{R_0} \right\}$$

$$\doteq \frac{-2k^2}{\sqrt{k_0^2-k^2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{1}{R_0}\left\{ie^{ik_0R-i}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\cos\theta.e^{ik_0R_0}\right\}.$$

Wenn man die beiden Seiten mit dem Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ multipliziert, so wird:

$$-ik_0\frac{\partial I_2}{\partial r}e^{-i\omega t}=\frac{-2k^2}{\sqrt{k_0^2-k^2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left\{ie^{ik_0l\cos\theta}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\cos\theta\right\}\frac{e^{i(k_0R_0-\omega t)}}{R_0}$$

$$=\frac{-2k^2}{\sqrt{k_0^2-k^2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[\left\{i\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.-\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)\right\}$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)+\cos\theta\right]\frac{e^{i(k_0R_0-\omega t)}}{R_0}$$

$$=\frac{-4\pi\frac{k^2}{k_0^2}}{\lambda\sqrt{1-\frac{k^2}{k_0^2}}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[\left\{i\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\sin\theta\right)\right\}(-1)^n+\cos\theta\right]\frac{e^{i(k_0R_0-\omega t)}}{R_0}.$$

Setzen wir nun:

$$\text{(18a)}\quad -\frac{k^2}{k_0^2}\left(1-\frac{k^2}{k_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=A+Bi,$$

so haben wir den Bestandteil der magnetischen Kraft, welche von I_2 herrührt:

$$H_\varphi^{(2)}=-\frac{4\pi}{\lambda} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[A\left\{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\right)+\cos\theta\right\}\right.$$

$$\left.-B(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)\right]\frac{\cos(k_0R_0-\omega t)}{R_0}$$

(18b)

$$+\frac{4\pi}{\lambda} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[B\left\{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)+\cos\theta\right\}\right.$$

$$+A(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\right)\Big]\frac{\sin(k_0R_0-\omega t)}{R_0}.$$

Als gesamte magnetische Kraft haben wir endlich:

$$(19)\quad H=H_\varphi=H_\varphi^{(1)}+H_\varphi^{(2)}$$

$$=-\frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\sin\theta}\left\{\cos\theta+(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)\right\}\frac{\sin(k_0R_0-\omega t)}{R_0}$$

$$-\frac{4\pi}{\lambda}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[A\left\{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)+\cos\theta\right\}\right.$$

$$\left.-B(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)\right]\frac{\cos(k_0R_0-\omega t)}{R_0}$$

$$+\frac{4\pi}{\lambda}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left[B\left\{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)+\cos\theta\right\}\right.$$

$$\left.+A(-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\cos\theta\right)\right]\frac{\sin(k_0R_0-\omega t)}{R_0}.$$

Wie es schon wohl bekannt ist, stehen die elektrischen und magnetischen Kräfte $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ eines schwingenden Dipols, die dem Hertzschen Vektor

$$=\Pi\frac{e^{ikR}}{R}$$

entsprechen, senkrecht aufeinander und sind nach dem Betrage gleich. In unserem Falle besteht der Hertzsche Vektor aus drei Teilen, d. h. nach (11)

$$\Pi_0=\frac{e^{ik_0R_a}}{R_a}-\frac{e^{ik_0R_{-a}}}{R_{-a}}-\frac{2i^2k^2z}{R_0\sqrt{k_0^2-k^2}}\frac{e^{ik_0R_{-a}}}{R_{-a}^2}.$$

Die ersten zwei Glieder entsprechen einfachen Dipolen, aber das dritte Glied nicht, da es einen nicht konstanten Faktor z/R_{-a} hat. Nur dann kann man es als einfachen Dipol ansehen, wenn man bei Differentiation in (2) jenen Faktor als konstant (z. B. in mässigen Entfernungen) ansehen kann. Nun suchen wir die Bedingungen dafür.

Wir haben:

$$(19a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{z}{R}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}\right)=0+ik_0\dfrac{rz}{R^2}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}\,, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\dfrac{z}{R}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}\right)=ik_0\dfrac{r}{R^2}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}-k_0^2\dfrac{rz^2}{R^3}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left\{r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{z}{R}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}\right)\right\}=ik_0\dfrac{2rz}{R^2}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}-k_0^2\dfrac{r^3z}{R^3}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}\,. \end{cases}$$

Um den Faktor z/R als konstant anzunehmen, müssen wir das erste gegen das zweite Glied in der rechten Seite jeder Gleichung vernachlässigen, d. h. R gegen k_0z^2 und zR gegen k_0r^2.

Wir nehmen z. B. $R=40\text{km}=4\times10^6\text{cm.}$, $\lambda=20\text{m}=2\times10^3\text{cm.}$, also $k_0=2\pi/\lambda=\pi\times10^{-3}$ an. Für die Rechnung, etwa eine Ungenauigkeit erst von 1 Proz. und dann von 10 Proz. erlaubt sein. Dazu halten wir derart, dass die ersten Glieder auf den rechten Seiten der Gleichungen (19a) nicht mehr als 1/100 oder 1/10 der zweiten Glieder betragen sollen. Wir haben dann zu verlangen:

$$R:\ k_0z^2<\frac{1}{100}\ \text{od.}\ \frac{1}{10},$$

$$zR:\ k_0r^2<\frac{1}{100}\ \text{od.}\ \frac{1}{10}.$$

Die hieraus folgenden Werte von z, r und dem diesen entsprechenden θ enthält die nachstehende Tabelle, und zwar in der ersten Spalte für den ersten Fall (1 Proz.), in der zweiten für den zweiten Fall (10 Proz.):

Tabelle IV

$z>3.57\ km.$	$z>1.13\ km.$
$\theta<84^\circ53'$	$\theta<88^\circ23'$
$r>5\,05\ km.$	$r>1.59\ km.$
$\theta>7^\circ13'$	$\theta>2^\circ17'$

In diesem Gebiete steht $\boldsymbol{E}$ senkrecht auf $\boldsymbol{H}$ und beide sind nach dem Betrage gleich. Wir erhalten also für die Energieströmung:

$$S=cEH=cH^2=cH_\varphi^2.$$

Und das Zeitmittel von S wird:

$$(20)\quad \overline{S}=\frac{8\pi^2 C}{\lambda^2 R_0^2\sin^2\theta}\Big[\Big\{(A^2+B^2)\cos^2\theta+1-2B\cos\theta\Big\}\Big\{\cos\theta$$
$$+(-1)^{n+1}\sin\Big(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\Big)\Big\}^2$$
$$+(A^2+B^2)\cos^2\theta\cos^2\Big(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\Big)$$
$$-2A(-1)^n\cos\theta\cdot\cos\Big(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\Big)$$
$$\times\Big\{\cos\theta+(-1)^{n+1}\sin\Big(\frac{2n+1}{2}\pi\cdot\cos\theta\Big)\Big\}\Big].$$

Die nach dieser Formel berechneten Energieströmungswerte für verschiedene Richtungen sind in der folgenden Tabelle gegeben:

Tabelle V

Die nebenstehenden Figuren zeigen die Erregungsarten der Antennen.

Trockener Boden.

$A=-0.022$, $B=2.3$, $A^2+B^2=5.29$

(o) $n=0$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0.114	0.402	0.6725	1.002	1.05	0.838	0.516	0.148

(I) $n=1$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
0.85	2.84	5 12	6.03	3.93	0.94	0.125	0.248	0.33	0.169

(II) $n=2$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
2.52	8.28	11.14	8.61	1.425	0.895	0.614	0.15	0.244	0.213

(III) $n=3$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
4.13	15.42	16.55	5.72	2.46	0.885	0.4625	0.359	0.478	0.54

(IV) $n=4$

10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°
0.217	16.2	23.7	25.7	17.55	9.73	4.5	4.81	3.29	0.1835
60°	65°	70°	75°	80°	85°				
0.878	1.01	0.011	0.379	0.161	0.415				

Nasser Boden

$A=-0.871$, $B=3.45$, $A^2+B^2=12.6$

(o) $n=0$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0.377	0.953	1.723	2.33	2.43	1.975	1.18	0.328

(I) $n=1$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
1.955	7.14	13.30	16.21	11.91	4.43	1.338	0.19	1.055	0.131

(II) $n=2$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
5.97	20.03	32.6	21.8	9.68	2.47	1.32	0.343	0.803	0.0282

(III) $n=3$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
9.84	37.42	53.15	26.58	8.10	2 31	1.01	1.10	1.775	0.049

(IV) $n=4$

10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0.407	40.2	61.1	72.3	66.25	43.15	20.4	13.92	7.74

55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
0.5415	1.97	5.67	0.402	0.398	0.616	0.0536

Seewasser

$A=23.6 \quad B=-25.3 \quad A^2+B^2=1197$

(o) $n=0$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
42.9	113.5	211	273	282	222	125	35.8

(I) $n=1$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
195.5	693	1245	1420	1300	797	327	61.3

(II) $n=2$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
575	1875	3142	3378	2325	865	129	33.5

(III) $n=3$

10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	85°
939	3600	5720	4265	2115	213.5	122.5	102	59.6	17

(IV) $n=4$

10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
55.7	3760	5825	7540	8380	7650	5560	2882

50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
1005	60.8	223	511.5	297	131	29.3	12.85

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass es ausser einer Hauptmaximum-Richtung der Energieausstrahlung mehrere Nebenmaximum-Richtungen für Oberschwingungen gibt. Diese Tatsache steht im Einklang mit der Theorie von M. Abraham.[1] Aber der bemerkens-

1. L. Bergmann, a. a. O.

werte Unterschied zwischen dem Resultaten von uns und dem von Abraham ist, dass die Nebenmaxima gegen das Hauptmaximum mehr verkleinert bei uns als bei Abraham sind.

Um die Richtcharakteristiken ersichtlich darzustellen, sind die in der Tabelle V angegebenen Ergebnisse in den umstehenden Figuren 3, 4, 5, 6, 7 graphisch in Polarkoordinaten—und zwar in den Charakteristiken die Energieströmungen selbst als Radiusvektoren—aufgetragen. Wegen der Kleinheit sind die Nebenmaxima, in der aufgenommenen Skala, in den Figuren auslassen. In den Figuren zeigen O A und O E die vertikale und die horizontale Richtung, und die Zahlen O, I,....., IV, die Ordnungszahlen der Oberschwingungen.

Trockener u. nasser Boden.
Kleine Indices t u. n sind die Unterscheidungszeichen für die Bodenarten.

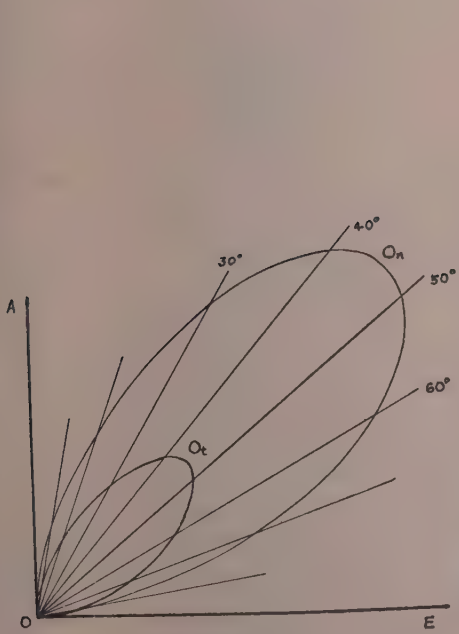


Fig. 3
Grundschwingung
($n=0$)

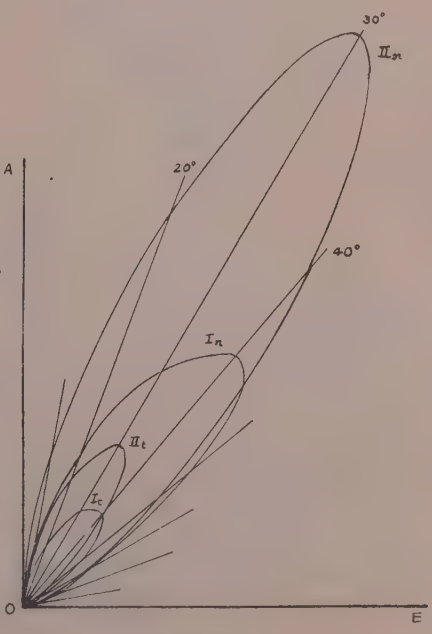


Fig. 4
Erste und zweite Oberschwingungen
($n=1, n=2$)

Fig. 5

Dritte u. vierte Oberschwingungen
($n=3$, $n=4$)

Seewasser

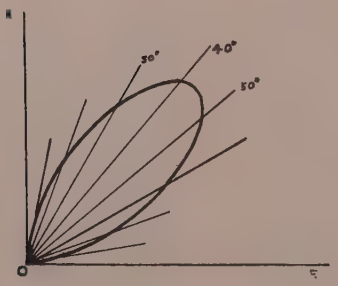


Fig. 6

Grundschwingung
($n=0$)

Fig. 7

Erste, zweite, dritte u. vierte Oberschwingungen
($n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$)

Man bemerkt bei den Vergleiche von unseren Ergebnissen mit den von Bergmann[1] oder von S. Uda[2] angegebenen, dass die Stellung der Hauptmaxima in beiden Fällen überhaupt übereinstimmt, ausser dem Falle der Hauptschwingung d. h. $n=0$.[3] Doch müssen wir hinzufügen, dass doch noch ein grosser Unterschied zwischen unserem Resultat und dem früheren existiere—die grosse Verminderung des Hauptmaximums selbst, die man ohne weiteres beim Vergleiche unserer Strahlungsformel (20) mit der früheren Abrahamschen leicht finden kann. Es scheint uns, dass diese Verminderung wegen der

1. L. Bergmann, a. a. O.
2. S. Uda, a. a. O.
3. In diesem Falle gibt es keine horizontale Strahlung bei uns wie bei T. L. Eckersley a. a. O., während es bei L. Bergmann oder S. Uda eine horizontale maximale Strahlung gibt.

unvollkommenen Leitfähigkeit der Erde stattfindet, weil die Strahlung auch in die Erde eintritt, wo die Energie stark absorbiert, d. h. die Beugung erfolgt. Die Behauptung wird qualitativ durch das Hygensprinzip leicht bestätigt. Unser Resultat gibt die quantitative Bestätigung.

Zum Schluss haben wir unserem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. K. Tamaki, für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung bei der Ausführung zu danken.

Sur l'Expansion de la Cavité Sphérique dans les Masses Fluides

Par

Kiugoro Kitagawa

(Reçu le 27 octobre 1930)

Sommaire

L'objet des recherches rapportées dans le présent mémoire a été d'étudier l'énonciation de la formule de l'hydrodynamique concernant les expansions de la cavité sphérique dans les masses fluides, soit en mer, soit en atmosphère, et de trouver l'accélération initiale, la vitesse maximum, la dépression de la pression qui est produite d'effectuer l'expansion de la cavité envisagée, le rayon de celle-ci qui résulte de nouveau de reposer les fluides, et qui s'accorde avec les expériences, et puis la durée de l'explosion.

(1) Préambule

Trouver le mouvement de la masse fluide en cas simple dans un état de s'écraser l'écume, c'est déja traité par Besant[1], Basset[2] et Lord Rayleigh[3], et le problème, au contraire, au point de vue de l'explosion de la torpille marine, c'est aussi adroitement étudié de la même équation de l'hydrodynamique que celle employée dans les recherches de se briser l'écume par M. H. Lamb.[4]

Nous cherchons ici les problèmes en le dernier cas, soit en mer, soit en atmosphère, avec les autres idées fondamentales pour apporter quelques arguments nouveaux, et nous nous proposons particulièrement de trouver la dépression de la pression du fluide intérieur, laquelle se produit après avoir effectué l'expansion de la cavité sphérique.

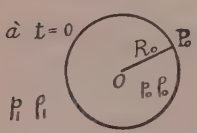
1. W. H. Besant, Hydrostatics and Hydrodynamics, 158 (1859).
2. A. B. Basset, An Elementary Treatise on Hydrodynamics and Sound, 25 (1890).
3. Lord Rayleigh, Phil. Mag. 34, 94 (1917). Scientific Papers, 6, 504.
4. M. H. Lamb, Phil. Mag. 14, 257 (1923).

Supposons qu'une couche sphérique solide, infiniment mince, entourée d'une masse fluide assez épaisse contient une masse gazeuse fort compressée, et que le système est équilibre. À un instant donné, $t=0$, la couche solide est anéantie, les fluides se meuvent et la sphère, c'est à dire la surface limitée par les deux fluides s'enfle très vite jusqu'à la certaine distance, et puis se contracte, on en obtient un mouvement pendulaire.

Il est évident, par raison de symétrie, que chaque élément des fluides est dirigé du centre de la cavité vers l'extérieur, et qu'à chaque instant les éléments qui se trouvent à la même distance du centre ont la même vitesse, la surface commune conserve donc la forme sphérique.

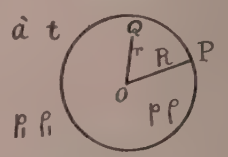
On prend comme l'origine le centre de la cavité sphérique, qui reste fixe pendant l'expansion.

Fig. 1



Appelons, à l'instant initial $t=0$, R_0 le rayon de la cavité sphérique, p_0 la pression, ρ_0 la densité du gaz intérieur (Fig. 1). et à l'instant t après avoir commencé l'explosion, R le rayon de la sphère, p la pression, ρ la densité du gaz intérieur (Fig. 2), et aussi p_1 la pression, ρ_1 la densité du fluide extérieur de la sphère envisagée.

Fig. 2



La vitesse des éléments fluides situés sur la surface du rayon R est vers l'extérieur $\frac{dR}{dt}=\dot{R}$, et on en a, grâce à la condition initiale $\dot{R}_0=0$.

Nous supposons que les deux fluides, intérieur et extérieur, sont dénués de la force extérieure, par exemple de la pesanteur, et que p et ρ sont liés par la formule de l'expansion adiabatique, nous en aurons

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \qquad \cdots\cdots(1)$$

où γ exprime le rapport des deux chaleurs spécifiques du gaz.

En vertu de ces restrictions que l'on a vues plus haut, il en résulte que s'il y a une fonction des vitesses à l'instant donné, par exemple à l'origine du temps $t=0$, il y aura, d'après le théorème de Lagrange, encore une fonction des vitesses à un instant t quelconque. Le fluide partant du repos, le mouvement est irrotationnel. Les vitesses dérivent donc d'un potentiel φ_t. Si l'on appelle r la distance du centre à un

élément fluide, la fonction φ_i est par raison de symétrie, celle des seules variables r et t. On en a, dans la sphère $r<R$,

$$\varphi_i=\frac{1}{2}\frac{r^2\dot{R}}{R}.$$

La vitesse des éléments situés à la distance r du centre est donnée par l'équation suivante

$$\dot{r}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}=\frac{r}{R}\dot{R}, \qquad \text{.....(2)}$$

la derivée étant prise le long du rayon de la sphère.

Si l'on suppose $r=R$, $\dot{r}$ devient $\dot{R}$, on a donc $\dot{R}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}$ lorsque r est égal à R.

On voit aisément que φ_i vérifie l'équation de Poisson.[1]

$$\Delta\varphi_i=3\frac{\dot{R}}{R}, \qquad \text{.....(3)}$$

Il en résulte que l'on a, d'après Lagrange, encore un potentiel de la vitesse dans la région extérieure de la sphère, lorsque p_1 et ρ_1 restent constants au point de vue des variables r et t. $r>R$,

$$\varphi_e=-\frac{R^2\dot{R}}{r},$$

alors on a la vitesse dans cette région

$$\dot{r}=\frac{\partial\varphi_e}{\partial r}=\frac{R_2\dot{R}}{r^2}, \qquad \text{.....(4)}$$

Puis, le potentiel φ_e vérifie en dehors l'équation de Laplace.

$$\Delta\varphi_e=0.$$

Si l'on suppose que le point Q situé à l'intérieur se déplace à l'extérieur d'une manière continue (Fig. 2), la vitesse varie d'une manière continue, et elle donne la valeur unique sur la sphère si le point Q s'y approche du dedans ou du dehors, la composante normale de la vitesse est en effet égale à l'une et l'autre.

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial r}\Big|_{r=R}=\frac{\partial\varphi_e}{\partial r}\Big|_{r=R}=\dot{R},$$

et aussi la composante tangentielle

---

1. M. V. Bjerknes, Vorlesungen über Hydrodynamischen Fernkräfte, 1,26 (1900).

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial s} = 0.$$

Voilà, la vitesse varie ainsi d'une manière continue dans tout l'espace dedans, dehors et sur la sphère.

Quant à la densité et à la pression de la masse fluide, ils se changent brusquement à la sphère, lorsque le point Q la traverse, ils s'y trouvent discontinus.

(2) L'equation fondamentale

Pour l'équation de l'hydrodynamique, on a comme d'abitude

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \int_{\Sigma} p(lu+mv+nw)d\sigma + \int p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau, \qquad \text{.....(5)}$$

où T et V expriment respectivement la demi-force vive et le potentiel de la force extérieure, en outre l, m, n les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$ de la surface fermée Σ dirigée vers l'intérieur de celle-ci, et u, v, w les composantes de la vitesse dirigée dans le sens positif des axes coordonnés. Il s'agit ici de les calculer en tout l'espace. T est égal à la somme des demi-forces vives, intérieure T_i et extérieure T_e de la sphère du rayon R.

On doit d'abord calculer l'intégrale définie

$$T_i = \int_{l'intérieur} \frac{1}{2}\rho \dot{r}^2 d\tau = 4\pi \int_0^R \frac{1}{2}\rho r^2 \frac{r^2\dot{R}^2}{R^2} dr,$$

remplaçant $\dot{r}$ par $\dot{R}$, d'après (2)

$$= \frac{2}{5}\pi\rho\dot{R}^2R^3,$$

car ρ n'est que la fonction du R

$$= \frac{2}{5}\pi\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 R^3\dot{R}^2,$$

en vertu de la relation (1), il se conduit à

$$= \frac{2}{5}\pi\rho_0 R_0^3\dot{R}^2. \qquad \text{.....(6)}$$

On a d'autre part

$$T_e = \int_{l'extérieur} \frac{1}{2}\rho_1 \dot{r}^2 d\tau = 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{2}\rho_1 \dot{r}^2 r^2 dr,$$

en vertu de l'équation (4),

$$= 2\pi\rho_1 \int_R^\infty \frac{R^4 \dot{R}^2}{r^2} dr,$$

car ρ_1 est constant

$$= 2\pi\rho_1 R^3 \dot{R}^2, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Il en résulte

$$T = T_i + T_e = \frac{2}{5}\pi\rho_0 R_0^3 \dot{R}^2 + 2\pi\rho_1 R^3 \dot{R}^2. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

D'après l'hypothèse, on trouve $V = 0$, la première intégrale du côté droit de (5) se conduit à

$$\int p(lu + mv + nw) d\sigma = -\int_\Sigma p_1 \dot{r} d\sigma = -4\pi p_1 R^2 \dot{R},$$

la seconde intégrale

$$\int p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau = \int p \Delta\varphi_1 d\tau = \int_o^R p \frac{3\dot{R}}{R} 4\pi r^2 dr,$$

utilisant la relation (3)

$$= 4\pi p R^2 \dot{R} = 4\pi p_0 R_0^{3\gamma} R^{2-3\gamma} \dot{R}.$$

On a donc au lieu de (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}\pi\rho_0 R_0^3 \dot{R}^2 + 2\pi\rho_1 R^3 \dot{R}^2\right) = -4\pi p_1 R^2 \dot{R} + 4\pi p_0 R_0^{3\gamma} R^{2-3\gamma} \dot{R}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

C'est à dire

$$\frac{2}{5}\pi\rho_0 R_0^3 \dot{R}^2 + 2\pi\rho_1 R^3 \dot{R}^2 = -4\pi p_1 \int_o^t R^2 \dot{R} dt + 4\pi p_0 R_0^{3\gamma} \int_o^t R^{2-3\gamma} \dot{R} dt.$$

Notre équation prendra la forme

$$\left(\frac{\rho_0}{5} R_0^3 + \rho_1 R^3\right)\dot{R}^2 + \frac{2p_1}{3} R^3 + \frac{2p_0 R_0^{3\gamma}}{3\gamma - 3} R^{3-3\gamma} -$$

$$-\frac{2p_1}{3}R_0^3-\frac{2p_0}{3\gamma-3}R_0^3=0. \qquad \text{.....(10)}$$

Cette équation différentielle est celle du premier ordre qui ne comprend que deux variables $\dot{R}$ et R. Nous allons la chercher pour nos buts.

(3) L'accélération initiale

On va trouver l'accélération initiale, c'est à dire la valeur $\ddot{R}=\frac{d^2R}{dt^2}$ en ce point $R=R_0$.

En différentiant avec t l'équation (10), on a

$$\frac{2\rho_0R_0^3}{5}\ddot{R}+3\rho_1R^2\dot{R}^2+2\rho_1R^3\ddot{R}-2p_0R_0^{3\gamma}R^{2-3\gamma}+2p_1R^2=0, \qquad \text{.....(11)}$$

considérant l'hypothèse, $\dot{R}=0$ lorsque $R=R_0$, l'équation (11) devient alors

$$\ddot{R}=\frac{p_0-p_1}{\left(\frac{\rho_0}{5}+\rho_1\right)R_0}, \qquad \text{.....(12)}$$

qui donne l'accélération initiale $t=0$, $R=R_0$, elle ne dépend des manières expansives du gaz, car l'équation (12) ne comprend pas le constant γ.

Prenons un cas spécial dans la mer où soient

$$p_1=2\times10^6\frac{dynes}{cm^2},\ \rho_1=1,$$

$$p_0=10^6\times10^7 \quad ,, \quad ,\ \rho_0=0.0013\times10^7,\ R_0=100\ cm.,$$

autrement dit, si l'une explosion est éclatée, qui exerce la pression de mill atmosphères dans la mer de dix mètres de profondeur, on en calcule l'accélération

$$\ddot{R}=7.92\times10^5\frac{cm}{sec^2},$$

beaucoup plus grande que celle de la gravité, il vérifie que l'on la néglige en plus haut.

(4) Vitesse maximum

Nous cherchons la vitesse maximum qui se produit au cours de l'explosion. Soumise à la condition du maximum $\ddot{R}=0$, l'équation (11) donne

$$3\rho_1 R^2\dot{R}^2 - 2p_0 R_0^{3\gamma} R^{2-3\gamma} + 2p_1 R^2 = 0,$$

l'on peut l'écrire à la forme suivante

$$\dot{R}^2 = \frac{2p_0}{3\rho_1} x^{3\gamma} - \frac{2p_1}{3\rho_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

où $x = \frac{R_0}{R}$, $0 < x < 1$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (14)

changeant aussi la forme du (10) par x

$$\left(\frac{\rho_0}{5} x^3 + \rho_1\right)\dot{R}^2 + \frac{2}{3\gamma - 3} p_0 x^{3\gamma} + \frac{2}{3} p_1$$

$$- \left(\frac{2}{3\gamma - 3} p_0 + \frac{2}{3} p_1\right) x^3 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10) \text{ bis}$$

En éliminant R entre ces deux dernières équations (13) et (10) bis, on a

$$\frac{2\rho_0 p_0}{15\rho_1} x^{3\gamma+3} + \frac{2\gamma p_0}{3(\gamma - 1)} x^{3\gamma} - \left(\frac{2p_1 p_0}{15\rho_1} + \frac{2}{3\gamma - 3} p_0 + \frac{2}{3} p_1\right) x^3 = 0,$$

en posant $x \neq 0$ et $\gamma = \frac{4}{3}$ dans celle-ci, on a

$$x^4 + 20\frac{\rho_1}{\rho_0} x - \left(\frac{p_1}{p_0} + 15\frac{\rho_1}{\rho_0} + 5\frac{p_1\rho_1}{p_0\rho_0}\right) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

à l'aide de (15), on peut simplifier (13)

$$\dot{R}^2 = -\frac{40}{3}\frac{p_0}{\rho_0} x + \frac{10}{\rho_0}\left(p_0 + \frac{p_1}{3}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13) \text{ bis}$$

On peut aisément trouver la vitesse maximum, si l'on connaît la racine $x = \frac{R_0}{R}$ de l'équation (15) entre nul et unité, remplaçant cette valeur dans l'équation (13) bis.

Alors, on se propose de la calculer en cas spécial.

(i) Dans la mer

Nous reprendrons le même cas que l'on a traité plus haut.

$$x = \frac{R_0}{R} = 0.73,$$

$$R = 137\ cm.$$

On a donc $\dot{R} = 1.6 \times 10^4 \frac{cm.}{sec.}$

(ii) Dans l'air

Posant $p_1 = 10^6 \ \frac{dynes}{cm^2}$, $\rho_1 = 0.0013$,

$p_0 = 10^6 \times 50$ „ „ $\rho_0 = 0.0013 \times 50$, $R_0 = 100\ cm$,

on en a $x = \frac{R_0}{R} = 0.55$,

$R = 180\ cm.$,

et $\dot{R} = 4.6 \times 10^3 \frac{cm.}{sec.}$

(5) Dépression de la pression du gaz

Pendant l'explosion, les particles sur la sphère du rayon R s'enflent avec la vitesse variable $\dot{R}$ et arrivent très vite jusqu'à la plus grande sphère du rayon R_1 où la vitesse $\dot{R}$ s'annulent de nouveau, et puis le mobile partant la sphère R_1 se retire, c'est oscillatoire. On va chercher plus tard la durée t_1 de cette demi-oscillation. On se propose de trouver la dépression dans la sphère produite par l'explosion, lorsque R devient R_1.

D'après les équation (10) et (10) bis, on a d'abord

$$\dot{R}^2 = \frac{-\frac{2}{3}p_1R^4 + \left(\frac{2}{3}p_1 + 2p_0\right)R_0^3R - 2p_0R_0^4}{R\left(\frac{\rho_0R_0^3}{5} + \rho_1R^3\right)}, \qquad \text{.....(16)}$$

ensuite

$$\dot{R}^2 = \frac{-2p_0x^4 + \left(\frac{2}{3}p_1 + 2p_0\right)x^3 - \frac{2}{3}p_1}{\frac{\rho_0}{5}x^3 + \rho_1}. \qquad \text{.....(17)}$$

Le numérateur du côté droit se change

$$y = -2p_0(x-1)\left[x^3 - \frac{1}{3}\frac{p_1}{p_0}(x^2+x+1)\right] \qquad \text{.....(18)}$$

$$= -10^8(x-1)(x-0.20)(x^2+0.193x+0.032), \qquad \text{.....(19)}$$

lorsque $\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{50}$ d'un cas que l'on voit plus haut,

ou $= -2 \times 10^9(x-1)(x-0.07)(x^2+\ldots\ldots), \qquad \text{.....(20)}$

lorsque $\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{1000}$ d'autre cas.

Pour $\dot{R}=0$, on a, dans le premier cas, comme deux racines réelles de l'équation $y=0$, $x=1$, $x=0.20$, dont la première $x=1$, c'est à dire $R=R_0$ exprime l'etat initial, la deuxième $x=0.20$, c'est à dire $\frac{R_0}{R}=0.20$ donne $R_1=5R_0=500\ cm$, posant $R_0=1m$.

Au moment, la pression dans la sphère R_1 se trouve par (1).

$$p=0.08\ bar. \qquad \text{.....(21)}$$

Dans le deuxième cas, comme on a traité le premier cas,

$$x=0.07,\ R_1=1420\ cm.$$

On peut trouver la pression

$$p=0.024\ bar. \qquad \text{.....(22)}$$

Il faut conserver le numérateur de (17) le signe positif afin que la vitesse existe. Cela posé, ses deux facteurs reels conservent le signe contraire, positif et négatif. Dans le premier cas, par exemple, on a donc la restriction

$$1>x>0\ 20.$$

c'est à dire, $R_0<R<5R_0(=R_1)$. ....(23)

On le traitera encore plus tard.

On voit que $p=0.080$ et $p=0.024$ respectivement suivant que $p_0=50\,p_1$ et $p_0=1000\,p_1$. Eh bien, est-ce qu'il y a la dépression maximum, considérant une série des explosions, lorsque l'on suppose que dernière dépression est une fonction inconnue de la pression initiale p_0?

D'après (18), on a

$$y_1=x^3-\frac{1}{3}\frac{p_1}{p_0}(x^2+x+1)=0, \qquad \text{.....(24)}$$

il faut discuter cette équation.

En posant dans l'équation (24)

$$x=u+\lambda,\ \frac{p_1}{3p_0}=a, \qquad \text{.....(25)}$$

il se conduit à

$$u^3-\left(\frac{a^2}{3}+a\right)u-\left(\frac{2a^3}{27}+\frac{a^2}{3}+a\right)=0, \qquad \text{.....(26)}$$

si l'on admet $\lambda=\frac{a}{3}$. On a donc

$$4u^3-g_2u-g_3=0, \qquad \ldots\ldots(27)$$

où $g_2=4\left(\frac{a^2}{3}+a\right)$, $g_3=4\left(\frac{2a^3}{27}+\frac{a^2}{3}+a\right)$

et l'on met,[1] $g=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2)=(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$

$$=-\frac{1}{9}a^6-a^5-6a^4-17a^3-27a^2<0,$$

il en est clair que les deux racines de l'équation (25) sont imaginaires conjuguées et l'autre est réelle.

Cherchons en effet les racines de l'équation (26). On a

$$u^3-bu-c=0, \qquad \ldots\ldots(28)$$

posant $g_2=4b$, $g_3=4c$

Si l'on y remplace dans l'équation (28)

$$u=\frac{\alpha+\beta v}{1+v}, \qquad \ldots\ldots(29)$$

avec les relations

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-\frac{3c}{2b}+\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}-\frac{b}{3}},\\ \beta&=-\frac{3c}{2b}-\sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}-\frac{b}{3}},\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(30)$$

il vient immédiatement

$$\alpha^3-b\alpha-c+(\beta^3-b\beta-c)v^3=0. \qquad \ldots\ldots(31)$$

On en trouve une racine réelle $v=-\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\qquad \ldots\ldots(32)$

il vient $u=\frac{\alpha+\beta v}{1+v}=\frac{\alpha\beta^{\frac{1}{3}}-\beta\alpha^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}}$,

on a donc la valeur réelle

$$x=u+\lambda=\frac{\alpha\beta^{\frac{1}{3}}-\beta\alpha^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}}+\frac{a}{3}. \qquad \ldots\ldots(33)$$

1. J. Tannery et J. Molk, Eléments de la Théorie des Fonctions Elliptiques, 2, 251 (1896).

Dans le cas où t est réel, nous posons

$$x=w. \qquad \text{.....(34)}$$

Puisque c'est ainsi, nous allons chercher la relation entre p_0 et p.

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}=x^4$$

tenant compte de l'équation (14) et la valeur $\gamma=\frac{4}{3}$.

Il se conduit ainsi

$$p=p_0x^4, \qquad \text{.....(35)}$$

en la différentiant avec p_0

$$\frac{dp}{dp_0}=w^3\left(w+4p_0\frac{dw}{dp_0}\right),$$

en vertu de (34).

Pour trouver la valeur extrême de p, il faut poser $\frac{dp}{dp_0}=0$. On a alors

$$w+4p_0\frac{dw}{dp_0}=0, \qquad \text{.....(36)}$$

ou $\qquad w-4a\frac{dw}{da}.$

Si l'on peut trouver les racines réelles de p_0 en (36), on peut donc calculer la pression minimum de p. Nous allons ainsi discuter les racines en détail.

En ce qui conserne (30), on peut simplifier

$$\frac{3c}{2b}=\frac{1}{2}+\frac{a}{3}+\left(1-\frac{a}{3}+\frac{a^2}{9}-\frac{a^3}{27}+\text{.....}\right),$$

remarquant la condition $0<a<\frac{1}{3}$

$$=\frac{3}{2}+\frac{a^2}{9}-e,$$

posant $\qquad e=\frac{a^3}{27+9a}<0.002,$

et $\qquad \sqrt{\frac{9c^2}{4b^2}-\frac{b}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{a}{9}+\frac{17a^2}{243}-f$

posant $f=\frac{209}{6561}a^3-\cdots\cdots$.

En les remplaçant dans l'équation (30), on a

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-\frac{a}{9}-\frac{10}{243}a^2,\\ \beta&=-3+\frac{a}{9}-\frac{44}{243}a^2.\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(37)$$

Ce sont les séries convergentes, car elles sont derivées au moyen de la théorème de la binome. On en a

$$v=-\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}=-\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\left(1+\frac{11}{81}a-\frac{220}{6561}a^2\right),$$

alors $x=w=\frac{\alpha+\beta v}{1+v}+\frac{a}{3}$,

il vient $w=a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}a+\cdots\cdots$, $\qquad\cdots\cdots(38)$

c'est la convergente absolue.

Si l'on suppose a être assez petit, on en a

$$w=a^{\frac{1}{3}}$$

il donne $w=0.0693$ lorsque $\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{1000}$, quoiqu'il donne $w=0.142$ lorsque $\frac{p_1}{p_0}=\frac{1}{50}$. Ce s'accordent avec les valeurs (19) et (20). Il donne aussi le rayon R_1 de la sphère explosive dont les masses fluides s'arrêtent de nouveau

$$R_1=R_0\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{p_0}{p_1}}, \qquad \cdots\cdots(38)\text{ bis}$$

car $w=\frac{R_0}{R_1}$ et $a=\frac{p_1}{3p_0}$.

Cette formule (38) bis se rapporte avec celle de M. Ramsauer[1] qui l'a trouvée d'après des expériences

$$R_1=const.\sqrt{\frac{M}{p_1}},$$

désignant M la masse explosive, à la grâce de la formule sur l'explosion

1. M. C. Ramsauer, Ann. d. Phys., 72, 4 (1923).

de la torpille marine représentée par M. Nomitsu[1] qui donne la proportionnalité de la pression y produite et la masse explosive.

Différentiant l'équation (38) avec a, on a donc

$$\frac{dw}{da}=\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{9}a^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots,$$

alors on a

$$-w+4a\frac{dw}{da}=\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{9}a^{\frac{2}{3}}+a+\cdots\cdots, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

il se conduit immédiatement à l'inégalité suivante

$$\frac{dp}{dp_0}=w^3\left(w-4a\frac{dw}{da}\right)<0,$$

tenant compte des relations

$$w>0 \quad \text{et} \quad w-4a\frac{dw}{da}<0.$$

Parsque la derivée $\frac{dp}{dp_0}$ reste essentiellement négative, la pression dérivée p diminue constamment et tend donc sans alternatives vers sa valeur minimum, si la pression initiale p_0 augmente. Il n'y a pas de dépression maximum, considérant une série des explosions, car la dépression conduite est une fonction monotone de la pression initiale p_0.

(6) Durée de l'explosion

Il s'agit ici de la durée de l'explosion qui est trouvée par l'intégral du temps t en l'équation (10). Celle-ci donne directement

$$\dot{R}^2=-\frac{\frac{2}{3}p_1R^3-\left(2p_0+\frac{2}{3}p_1\right)R_0^3+2p_0R_0^4R^{-1}}{\frac{\rho_0R_0^3}{5}+\rho_1R^3}$$

en posant $z=\frac{R}{R_0}>1$, il vient

$$R_0^2\dot{z}^2=-\frac{\frac{2}{3}p_1z^4-\left(2p_0+\frac{2}{3}p_1\right)z+2p_0}{\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z}$$

1. M. T. Nomitsu, Suityû Bakuhatu no Rironteki Kenkyû, 27 (1917).

il se conduit à

$$t=\int_1^z \frac{R_0\left(\rho_1 z^4+\frac{\rho_0}{5}z\right)^{\frac{1}{2}}dz}{\left[-\frac{2}{3}p_1 z^4+\left(\frac{2}{3}p_1+2p_0\right)z-2p_0\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{.....(40)}$$

où $z>1$,

en décomposant le dénominateur de la même manière de (18)

$$y=-\frac{2}{3}p_1 z^4+\left(\frac{2}{3}p_1+2p_0\right)z-2p_0$$
$$=-2p_0(z-1)\left[a(z^3+z^2+z)-1\right]$$

ou $$=-2p_0\frac{1}{x^4}(x-1)\left[x^3-a(x^3+x^2+x)\right]$$

tenant en compte de la relation $z=\frac{1}{x}$

$$=-2p_0\frac{1}{x^4}(x-1)(x-w)(x^2+kx+l)$$

étant k et l les constants

$$=-2p_0\frac{1}{x^4}(x-1)(x-w)(x-w_2)(x-w_3)$$

où w est rèel, w_2 et w_3 sont imaginaires conjuguées

ou $$=2p_0(z-1)(1-wz)(1-w_2z)(1-w_3z), \qquad \text{.....(41)}$$

posant $w=\frac{\alpha+\beta v}{1+v}+\frac{a}{3}$, $w_2=\frac{\alpha+i\beta v}{1+iv}+\frac{a}{3}$, $w_3=\frac{\alpha-i\beta v}{1-iv}+\frac{a}{3}$.

En ayant la condition complète de (40), $1<z<\frac{1}{w}$,

il nous donne

$$t_1=\int_1^{\frac{1}{w}} \frac{R_0\left(\rho_1 z^4+\frac{\rho_0}{5}z\right)^{\frac{1}{2}}dz}{\left[2p_0 w(z-1)\left(\frac{1}{w}-z\right)(1+kz+lz^2)\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad \text{.....(42)}$$

qui représente la durée de l'explosion, c'est à dire le temps depuis où l'explosion va commencer jusqu'à celui où le mouvement s'arrête de nouveau.

Nous nous proposons ici d'intégrer un cas spécial où la pression intérieure est égale à cinquante atmosphères et $\frac{p_0}{p_1}=50$, $R_0=100\ cm$, $w=0.20$. On a donc le dénominateur

$$y=-2p_0w(z-1)\left(z-\frac{1}{w}\right)(1+0.1933z+0.032z^2)$$

$$=-2\times 50\times 10^6\times 0.20(z-1)(z-5)(1+0.1933z+0.032z^2),$$

au moyen de (19) et (41). On a alors

$$t_1=\frac{1}{10}\int_1^5\frac{1}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{T}{S}\right]^{\frac{1}{2}}dz,$$

où $S=0.64z^2+3.866z+20$, $T=0.0013z^4+0.013z$.

S et T sont uniformément croissants, lorsque z augmente de 1 vers 5, et on en a aisément

	S	T	$\left(\frac{T}{S}\right)^{\frac{1}{2}}$
$z=1$:	24.506	0.0143	0.02416
$z=5$:	55.330	0.8125	0.1212

en appliquant ces valeurs dans l'équation t_1,

$$\frac{0.02416}{10}\int_1^5\frac{dz}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}}<t_1<\frac{0.1212}{10}\int_1^5\frac{dz}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

on a d'ailleurs

$$\int_1^5\frac{dz}{[4-(z-3)^2]^{\frac{1}{2}}}=\pi,$$

on a donc

$$7.6\times 10^{-3}<t_1<3.8\times 10^{-2}, \qquad \text{.....} \qquad \text{.....} \quad (43)$$

celui-ci nous donne la durée de l'explosion en ce cas spécial que nous supposons plus haut.

Cherchons ensuite le cas générale. On peut changer la forme du numérateur de l'intégrale (42).

$$\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z=\frac{\rho_0}{5}z^4\left(\frac{5\rho_1}{\rho_0}+\frac{1}{z^3}\right)=\frac{\rho_0}{5}z^4(\varepsilon+1-\eta),$$

posant $\frac{5\rho_1}{\rho_0}=\varepsilon<1$ et $\frac{1}{z^3}=1-\eta$,

donc $\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z=\frac{\rho_0}{5}z^4(1+\delta)$,

posant $\delta=\varepsilon-\eta<1$,

il vient

$$\sqrt{\rho_1 z^4+\frac{\rho_0}{5}z}=\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}z^2(1+\delta)^{\frac{1}{2}}\cong\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}z^2\left(1+\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)z^2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\cdot\frac{1}{z}$$

on a donc l'équation suivante au lieu de (40)

$$t_1=\frac{R_0}{\sqrt{2p_0w}}\int_1^{\frac{1}{w}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)z^2dz}{\left[(z-1)\left(\frac{1}{w}-z\right)(1-w_2z)(1-w_3z)\right]^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{R_0}{\sqrt{2p_0w}}\int_1^{\frac{1}{w}}\frac{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}dz}{z\left[(z-1)\left(\frac{1}{w}-z\right)(1-w_2z)(1-w_3z)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

il se ramène en effet aux intégrales élliptiques dont l'une s'appelle le premier type et l'autre le second type.[1]

D'autre part, on a

$$1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}>\frac{1}{z^3}$$

car $\quad 0<\frac{5\rho_1}{\rho_0}<1, \quad 0<\frac{1}{z^3}<1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{donc}\quad \frac{1}{2}H<\sqrt{\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z}<H,\\ \text{où}\quad H=\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)z^2,\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

en prenant pour $\sqrt{\rho_1z^4+\frac{\rho_0}{5}z}$ les valeur, petite et grande de (44), il se conduit à

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}I<t_1<I,\\ \text{où}\quad I=\frac{R_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right)\int_1^z\frac{z^2dz}{\sqrt{-\frac{p_1}{3}z^4+\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)z-p_0}},\end{array}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

1. M. E. Picard, Traité d'Analyse, 1, 60 (1922).

celui-ci donne la durée qui est bornée supérieurement et intérieurement.

Cherchons par suite l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2=-\frac{p_1}{3A^3}z^4+\frac{1}{A^3}\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)z-\frac{p_0}{A^2}=R(z), \qquad \ldots(46)$$

où $$A=\frac{R_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right).$$

En comparant cette équation avec

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4{}^1,$$

on obtient les cinq équations

$$a_0=-\frac{p_1}{3A^2},\quad a_1=0,\quad a_2=0,$$

$$4a_3=\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)\frac{1}{A^2},\quad a_4=-\frac{p_0}{A^2},$$

de plus

$$g_2=3a_2^2-4a_1a_3+a_0a_4=\frac{p_1p_0}{3A^4},$$

$$g_3=2a_1a_2a_3+a_0a_2a_4-a_4a_1^2-a_2^2-a_0a_3^2$$

$$=\frac{p_1}{3A^3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)\right]^2.$$

En remplaçant z par $\dfrac{A}{\sqrt{-\dfrac{p_1}{3}}}y$ en (46), on a

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=y^4+6B_2y^2+4B_3y+B_4, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

les constants étant donnés par les équations

$$B_2=0$$

$$B_3=\sqrt{a_0}a_3=\sqrt{-\frac{p_1}{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{p_1}{3}+p_0\right)\frac{1}{A^3}$$

$$B_4=a_0a_4=\frac{p_1p_0}{3A^4}.$$

Rappelons d'ailleurs les formules fondamentales

1. J. Tannery et J. Molk, loc. cit., 4, 63.

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = y^4 - 6y^2 P_a + 4yP'_a + 9P_a^2 - 2P''_a,$$

où a est une constante, et

$$P'^2_a = 4P_a^3 - g_2 P_a - g_3,$$

on a alors

$$\left.\begin{aligned} -P_a &= B_2 = 0, \\ P'_a &= B_3 = \sqrt{a_0}\, a_3 = \frac{1}{4A^3}\sqrt{-\frac{p_1}{3}}\left(\frac{p_1}{3} + p_0\right). \end{aligned}\right\} \quad \text{.....(48)}$$

en vertu des deux égalités, on peut directement déterminer la constante a, à des multiples près des deux périodes.

En tenant compte de la fonction

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{P'_u - P'_a}{P_u - P_a},$$

qui vérifie l'équation en y, il en résulte que l'équation

$$z = \frac{A}{\sqrt{-\frac{p_1}{3}}}\, y = \frac{A}{2\sqrt{-\frac{p_1}{3}}}\,\frac{P'_u - P'_a}{P_u - P_a},$$

est la racine trouvée de l'équation (46).

Utilisant la formule générale sur la réduction

$$\int \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{\sqrt{R(z)}}\, dz = C' - \zeta(u+a) - \zeta u,$$

où C' est une constante arbitraire, on a ici

$$a_0 \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{R(z)}} = C' - \zeta(u+a) - \zeta u$$

car $a_1 = a_2 = 0$, de là

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{R(z)}} = C + \frac{3A^2}{p_1}\left[S(u+a) + \zeta u\right], \quad \text{.....(49)}$$

où C est une constante arbitraire.

Il en résulte que la durée de l'explosion s'exprime par l'équation suivante

$$t_1 = A \int_1^{\frac{1}{w}} \frac{z^2 dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en conséquence

$$t_1=\frac{3A^3}{p_1}\left[\zeta(u+a)+\zeta u\right]_{u(1)}^{u\left(\frac{1}{w}\right)}, \qquad \text{.....(50)}$$

On peut ainsi calculer la valeur de la durée t_1, au moyen des séries infinies.

(7) Résumé et Conclusion

Nous avons formé pour l'équation fondamentale sur les quelques problèmes concernants les expansions de la cavité sphérique dans les masses fluides

$$\left(\frac{\rho_0}{5}R_0^3+\rho_1 R^3\right)\dot{R}^2+\frac{2p_1}{3}R^3+\frac{2p_0R_0^{3\gamma}}{3\gamma-3}R^{3-3\gamma}$$
$$-\frac{2p_1}{3}R_0^3-\frac{2p_0}{3\gamma-3}R_0^3=0$$

applant, à l'instant initial $t=0$, p_0 la pression, ρ_0 la densité du gaz qui a la forme sphérique du rayon R_0, et à l'instant t après avoir commencé l'explosion, p, ρ, R les quantités correspondantes respectivement, et de même p_1, ρ_1 les quantités du fluide extérieur de la sphère.

L'accélération initiale ($t=0$, $R=R_0$) s'exprime par la formule

$$\ddot{R}=\frac{p_0-p_1}{\left(\frac{\rho_0}{5}+\rho_1\right)R_0},$$

il vient $\ddot{R}=7.92\times10^6\frac{cm}{sec^2}$ en cas spécial dans la mer.

La vitesse maximum $\dot{R}$ se donne par l'équation

$$\dot{R}^2=-\frac{40}{3}\frac{p_0}{\rho_0}x+\frac{10}{\rho_0}\left(p_0+\frac{p_1}{3}\right),$$

avec $x^4+20\frac{\rho_1}{\rho_0}x-\left(\frac{p_1}{p_0}+15\frac{\rho_1}{\rho_0}+5\frac{p_1\rho_1}{p_0\rho_0}\right)=0,$

lorsque $\gamma=\frac{4}{3}$.

Dans la mer, par exemple, on a d'abord la vitesse maximum $\dot{R}=1.6\times10^4\frac{cm}{sec}$ où $R=137\ cm.$ On a ensuite, en cas spécial dans l'air, $\dot{R}=4.6\times10^3\frac{cm}{sec}$, où $R=180\ cm.$

Pendant l'explosion, la sphère s'enfle très vite avec la vitesse $\dot{R}$ du rayon R_0 au plus grand R_1 où la vitesse s'annule de nouveau.

En le second cas dans l'air où $R_1=5\ m.$, on a pour la dépression conduite la valeur 0.080 bar. En le premier cas dans la mer où $R_1=1420\ cm.$, la dépression 0.024 bar.

A l'appui de l'équation $w=a^{\frac{1}{3}}$, lorsque l'on suppose a être assez petit, on trouve le rayon R_1 de la sphère où le mouvement est nul de nouveau

$$R_1=R_0\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\frac{p_0}{p_1}},$$

il s'accorde avec la formule empirique.

Car la dérivée $\frac{dp}{dp_0}$ reste négative, la pression conduite p diminue constamment et tend donc sans alternatives vers sa valeur minimum, quand on augmente la pression initiale p_0.

La durée t_1 de l'explosion en le second cas dans l'air s'exprime par l'inégalité,

$$7.6\times 10^{-3}<t_1<3.8\times 10^{-2},$$

elle se représente en cas général par les fonctions élliptiques

$$t_1=\frac{3A^3}{p_1}\Big[\zeta(u+a)-\zeta u\Big]_{u(1)}^{u\left(\frac{1}{w}\right)}$$

posant $$A=\frac{R_0}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{5}}\left(1+\frac{5\rho_1}{\rho_0}\right).$$

Puisque c'est ainsi, on peut calculer la valeur t_1, au moyen des séries infinies.

Nous ne saurions terminer ce mémoire sans exprimer nos remerciements à M. le professeur K. Tamaki qui a bien voulu revoir les épreuves, et nous guida avec la bienveillance particulièrement agréable.

Vol. XIV, No. 1, Published January 30, 1931

Price - - - - Yen 1.00

These Memoirs are on Sale at

MARUZEN COMPANY, LTD.

TOKYO, OSAKA, KYOTO, NAGOYA, YOKOHAMA,
FUKUOKA & SENDAI

昭和六年一月二十五日印刷
昭和六年一月三十日發行

編纂兼發行者　京都帝國大學理學部

印刷者　須磨勘兵衛
京都市下京區北小路通新町西入

印刷所　內外出版印刷株式會社
京都市下京區西洞院七條南

賣捌所　丸善株式會社
東京、大阪、京都、名古屋、横濱、福岡、仙臺

CONTENTS

Über die Ausstrahlung der vertikalen Antennen in der drahtlosen Telegraphie mit kurzen Wellen

Von W. Nakayama u. K. Komatu. 1

Sur l'Expansion de la Cavité Sphérique dans les Masses Fluides

Par Kiugoro Kitagawa. 23